

文章编号: 1000-7598-(2007) 01-0001-06

考虑损伤效应的岩石类材料局部化特性分析

栾茂田¹⁻³, 王忠昶^{1,2}, 杨庆^{1,2}

(1.大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116024; 2.大连理工大学 土木水利学院岩土工程研究所, 大连 116024;
3.中国科学院 武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

摘要:在各向同性损伤条件下, 考虑岩石损伤过程中的刚度降低和体积扩容, 通过理论推导建立了岩石发生分叉失稳时的最大硬化模量和临界局部化方向, 探讨了局部化方向角对于岩石的损伤程度和初始泊松比的依赖关系, 并对平面应力与平面应变两种条件下单轴拉伸试件的分叉特性进行了对比分析。研究表明, 岩石的初始泊松比与损伤程度越大, 局部化方向角越大; 尽管平面应力与平面应变条件下单轴拉伸问题的局部化方向角具有相似的变化趋势, 但平面应力条件下的局部化方向角低于平面应变条件下同样情况下的局部化方向角。

关键词: 损伤弱化; 最大硬化模量; 分叉; 局部化方向; 岩石类材料

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Analysis of localization behavior of rock-like materials with damage effect

LUAN Mao-tian¹⁻³, WANG Zhong-chang^{1,2}, YANG Qing^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
3. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: The critical bifurcation orientation and its corresponding hardening modulus for rock-like geomaterials are derived considering the effect of stiffness degradation and volumetric dilatancy under the assumption of isotropic damage. The dependency of the localized orientation on damage degree and initial Poisson's ratio of rock is examined and the bifurcation behavior of uniaxial tension sample under plane-stress condition is compared with that under plane-strain condition. It is shown that the localization orientation angle intimately depends on both initial Poisson's ratio and damage degree for the rock sample under uniaxial tension condition. As the initial Poisson's ratio or damage degree increases, the orientation angle of the plane on which localization tends to be initiated gets to increase. At the same time, the localization orientation angle of rock sample under plane-stress condition is lower than that under plane-strain condition.

Key words: damage degradation; maximum hardening modulus; bifurcation; orientation of localization; rock-like materials

1 引言

局部化分叉现象是工程材料不稳定性的重要表现形式, 是材料破坏的前兆, 表现为材料在经历一定的均匀变形后, 突然进入应变高度集中或局部化的变形阶段。Hill^[1]、Rudnicki 和 Rice^[2]、Ottosen 和 Renesson^[3]、Neilsen^[4]、李国琛^[5]、尹光志^[6]、潘一山^[7]等从弹塑性理论的角度探讨了材料分叉与失稳问题, 但尚未考虑材料的损伤效应。实际上岩石

等材料在弹塑性变形过程中伴随着明显的材料特性弱化或损伤等非线性特征, 材料的破坏是一个渐进过程, 在大量微观缺陷逐渐显现的同时伴随有显著的体积扩容, 此时岩石的泊松比增大, 而强度和刚度却有不同程度的下降, 这些效应密切地依赖于岩石的损伤程度。因此, 在材料的分叉与失稳分析中, 必须同时考虑弹塑性和损伤两种非线性变形特征。为此, 本文在各向同性损伤的假定下, 考虑岩石损伤过程中的刚度退化和体积扩容所引起的泊松比增

收稿日期: 2005-09-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 10172022)与教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目(教技函[1998]2号)和中国科学院武汉岩土力学研究所领域前沿基础研究基金资助项目(No.Q110305)。

作者简介: 栾茂田, 男, 1962年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土力学基本理论与数值分析、海洋土力学理论与实验技术、非线性土动力学理论与计算等方面的科研与教学工作。E-mail: mtluan@dlut.edu.cn

大等变化特征,通过理论推导建立了岩石的临界硬化模量和局部化方向角,探讨了局部化方向角对岩石的损伤程度和初始泊松比的依存关系,并分别在平面应力与平面应变两种条件下,对单轴拉伸试件的分叉问题进行了对比分析。

2 各向同性损伤的增量型本构关系

传统的各向同性损伤本构关系可以表达为

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

$$C : D = I_4 \quad (2)$$

式中 C 为材料柔度张量; I_4 为四阶单位张量; D_{ijkl} 为随着细观微缺陷发展而不断衰退的材料弹性损伤模量张量,一般可以写成下列形式^[8]:

$$D_{ijkl} = (1-d) D_{ijkl}^0, \quad \dot{D}_{ijkl} = -\dot{d} D_{ijkl}^0, \quad C_{ijkl} = \hat{d} C_{ijkl}^0 \quad (3)$$

式中 D_{ijkl}^0 为初始弹性模量张量; d 为各向同性损伤变量,依赖于塑性应变历史; $\hat{d} = 1/(1-d)$; 在弹性加载、卸载和中性变载过程中,损伤变量没有变化。因此

$$\dot{d} = \left(\frac{\partial d}{\partial \epsilon_p} \right) \dot{\epsilon}_p \quad (4)$$

式中 $\dot{\epsilon}_p$ 为塑性应变速率。引入损伤加卸载函数

$$F(\sigma_{ij}, \lambda) = 0 \quad (5)$$

式中 λ 为弹性域内的一个内变量。当材料的应力状态满足损失屈服函数即 $F = 0$ 时,材料就会发生进一步地损伤劣化。设 G 为材料的损伤势函数, ϵ_{ij}^d 为由材料劣化所引起的损伤应变。则材料的增量本构关系为

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^d) \quad (6)$$

当损伤势函数不同于屈服函数时,利用非关联流动法则,则有

$$\dot{\epsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} = \dot{\lambda} g_{kl} \quad (7)$$

式中 $g_{kl} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}$ 为应力空间内损失势函数 G 的梯度函数。根据一致性条件,则有

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = f_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (8)$$

式中 $f_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ 为加载函数的梯度函数; $H = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}$

为硬化或软化模量; $\dot{\lambda}$ 为非负的损伤乘子。

于是,式(2)可进一步地以率形式表达为

$$\dot{D}_{ijkl} = -D_{ijpq} \dot{C}_{pqrs} D_{rskl} \quad (9)$$

采用柔度张量,则流动法则可表示为

$$\dot{\epsilon}_{pq}^d = \dot{C}_{pqrs} \sigma_{rs} \quad (10)$$

其中 $\dot{C}_{ijkl} = \dot{\lambda} M_{ijkl}$, 这里 M_{ijkl} 为初始柔度张量。

由式(7)和式(10),可得

$$g_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (11)$$

而由式(6)~(8)可得

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{A} f_{ij} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (12)$$

$$\text{其中 } A = H + \phi_{pq} D_{pqrs} M_{rsuv} \sigma_{uv} > 0 \quad (13)$$

将式(12)与式(13)代入式(6)和式(7),即可得到下列各向同性损伤本构关系的增量形式:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ed}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (14)$$

式中 D_{ijkl}^{ed} 为弹性损伤切线模量张量。

$$D_{ijkl}^{\text{ed}} = D_{ijkl} - \begin{cases} 0, & \text{弹性加载} \\ \frac{1}{A} D_{ijkl} M_{abcd} \sigma_{cd} f_{xy} D_{xykl}, & \text{损伤加载} \end{cases} \quad (15)$$

损伤加卸载准则服从下列的 Kuhn-Tucker 互补性条件:

$$\dot{F} \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{F} \dot{\lambda} = 0 \quad (16)$$

考虑到损伤的演变特征,根据 Carol 等的建议^[9],式(12)中损伤因子 $\dot{\lambda}$ 和初始柔度张量 M_{ijkl} 分别取为

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{d}}{(1-d)^2}, \quad M_{ijkl} = C_{ijkl}^0 \quad (17)$$

由式(11)可得

$$g_{ij} = C_{ijkl}^0 \sigma_{kl} = \epsilon_{ij}^0 \quad (18)$$

选择下列的损伤加卸载函数^[10]

$$F = f(w^0, \hat{d}) - r(\hat{d}), \quad w^0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl}^0 \sigma_{kl} \quad (19)$$

式中 $f(w^0, \hat{d})$ 为等效裂纹扩展驱动力; $r(\hat{d})$ 为损伤屈服面的代表半径,它表示材料的开裂或屈服取决于当前的累积损伤量。

则硬化模量一般表达式为

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\frac{\partial f(w^0, \hat{d})}{\partial \hat{d}} + \frac{\partial r(\hat{d})}{\partial \hat{d}} \quad (20)$$

而加载函数的梯度函数可写成为

$$f_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f(w^0, \hat{d})}{\partial w^0} C_{ijkl}^0 \sigma_{kl} = \frac{\partial f(w^0, \hat{d})}{\partial w^0} \varepsilon_{ij}^0 \quad (21)$$

将式 (18) ~ (21) 代入式 (13), 并考虑式 (3), 则有

$$A = -\frac{\partial f(w^0, \hat{d})}{\partial \hat{d}} + \frac{\partial r(\hat{d})}{\partial \hat{d}} + 2(1-d)w^0 \frac{\partial f(w^0, \hat{d})}{\partial w^0} \quad (22)$$

于是弹塑性损伤切线模量为

$$\mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ed}} = (1-d)\mathbf{D}_{ijkl}^0 - \frac{(1-d)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial w^0} \right)}{\frac{\partial r}{\partial \hat{d}} - \frac{\partial f}{\partial \hat{d}} + 2(1-d)w^0 \frac{\partial f}{\partial w^0}} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (23)$$

3 损伤局部化的分叉分析

损伤材料的不连续分叉条件由下列所定义的损伤局部化张量 $\mathbf{Q}_{il}^d$ 之奇异性所决定

$$\mathbf{Q}_{il}^d = \mathbf{n}_j \mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ed}} \mathbf{n}_k \quad (24)$$

式中 $\mathbf{n}_j (j=1, 2, 3)$ 为局部化带特征面的单位法向量, 材料中出现不连续分叉的必要条件为

$$\det[\mathbf{Q}_{il}^d] = 0 \quad (25)$$

这个条件可以看作是局部化带特征面单位法向量的非线性齐次代数方程组获得其非奇异解的必要条件, 为此寻找与其相应的齐次线性代数方程组。考虑下列特征值问题

$$\mathbf{Q}_{il}^d \mathbf{y}_l^{(i)} = \lambda^{(i)} \mathbf{Q}_{il}^d \mathbf{y}_l^{(i)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (26)$$

考虑到 $\mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ed}}$ 的对称正定性, 可以证明 $\mathbf{Q}_{il}^d$ 也是对称正定张量, 其逆为 $(\mathbf{Q}_{il}^d)^{-1} = \mathbf{P}_{il}^d$, 于是式 (26) 可改写为

$$\mathbf{B}_{jl} \mathbf{y}_l^{(i)} = \lambda^{(i)} \mathbf{y}_l^{(i)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (27)$$

式中 $\mathbf{B}_{jl} = \mathbf{P}_{ji}^d \mathbf{Q}_{il}^d = \delta_{jl} - \frac{1}{A} \mathbf{P}_{ji}^d b_l a_l$; $a_l = \mathbf{f}_{mn} \mathbf{D}_{mnkl}^0 \mathbf{n}_k$; $b_l = \mathbf{n}_j \mathbf{D}_{ijst}^0 \mathbf{g}_{st}$ 。

考虑到 $\mathbf{P}_{il}^d$ 与 $\mathbf{Q}_{il}^d$ 的非奇异性, 则 $\mathbf{B}_{jl}$ 一定是非奇异的。由此可以证明 $\lambda=1$ 是式 (27) 的双重特征值, 进而根据矩阵性质可得到其第 3 个特征值。

$$\lambda^{(3)} = 1 - \frac{1}{A} a_i \mathbf{P}_{ij}^d b_j \quad (28)$$

而欲使 $\mathbf{B}_{jl}$ 是奇异的, 则特征值至少有一个为 0, 从而 $\lambda^{(3)} = 0$, 同时考虑关系式 (13), 得到发生局部化时所对应的硬化模量

$$H = -\mathbf{f}_{ij} \mathbf{D}_{ijkl} \mathbf{g}_{kl} + \mathbf{n}_j \mathbf{D}_{ijst} \mathbf{g}_{st} \mathbf{P}_{il}^d \mathbf{f}_{mn} \mathbf{D}_{mnkl} \mathbf{n}_k \quad (29)$$

设 $\mathbf{D}_{ijkl}^0 = \mathbf{D}_{ijkl}^e$, 这里 $\mathbf{D}_{ijkl}^e$ 为材料的各向同性弹性张量, 于是由式 (3) 得到

$$\mathbf{D}_{ijkl} = 2G^d \left[\frac{\nu^d}{1-2\nu^d} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \quad (30)$$

式中 G^d 和 ν^d 分别为材料损伤后的剪切模量和泊松比, 一般可以写成如下形式^[9]

$$G^d = (1-d)G \quad (31)$$

$$\nu^d = \frac{3\nu_0 + (1-2\nu_0)d}{3-(1-2\nu_0)d} \quad (32)$$

式中 G, ν_0 分别为损伤前的剪切模量和泊松比。

$$\mathbf{Q}_{il}^d = G^d \left(\frac{1}{1-2\nu^d} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_l + \delta_{il} \right) \quad (33)$$

$$\mathbf{P}_{il}^d = \frac{1}{G^d} \left(-\frac{1}{2(1-\nu^d)} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_l + \delta_{il} \right) \quad (34)$$

在所有可能发生局部化的方向中, 只有对应的硬化模量为最大值的方向最先满足局部化条件, 从而将首先发生局部化, 因此, 使得硬化模量获取其最大值 $H^d = \max H(\mathbf{n}_i)$ 的所对应平面法向方向 $\mathbf{n}_i$ 作为临界局部化带的法向矢量。

综合考虑上述各种关系, 则有

$$\frac{H}{2G^d} = 2n_k \mathbf{f}_{kl} \mathbf{g}_{ij} \mathbf{n}_j + \frac{\nu^d}{1-\nu^d} \left[\mathbf{n}_i (\mathbf{g}_{ss} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ss} \mathbf{g}_{ij}) \mathbf{n}_j - \mathbf{f}_{ii} \mathbf{g}_{ss} \right] - \mathbf{f}_{ij} \mathbf{g}_{ij} - \frac{1}{1-\nu^d} \mathbf{n}_i \mathbf{f}_{ij} \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \mathbf{g}_{kl} \mathbf{n}_l \quad (35)$$

其中 $f_v = \mathbf{f}_{ii}$, $\bar{f}_{ij} = \mathbf{f}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} f_v$, $g_v = \mathbf{g}_{ss}$, $\bar{g}_{ij} = \mathbf{g}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} g_v$,

$$\xi = \left(\frac{\partial f(w^0, \hat{d})}{\partial w^0} \right)^{-1}。$$

式中 $f_v, \bar{f}_{ij}$ 与 $g_v, \bar{g}_{ij}$ 分别为屈服函数与损伤势函数的梯度函数 $\mathbf{f}_{ij}$ 和 $\mathbf{g}_{ij}$ 的第一不变量及其偏量。进一步地假设 $\bar{f}_i (i=1, 2, 3)$ 为 $\bar{f}_{ij}$ 的主值, 同时定义

$$r = \varphi(f_v + g_v), \quad k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{f}_i \bar{g}_i + \frac{2}{3} \varphi f_v g_v \quad (36)$$

将上述关系代入式 (35), 则归一化硬化模量为

$$\frac{H}{4\xi G^d} = \sum_{m=1}^3 (\bar{f}_m^2 + r \bar{f}_m) n_m^2 - \psi \left(\sum_{i=1}^3 \bar{f}_i n_i^2 \right)^2 - k \quad (37)$$

$$\text{其中} \quad \varphi = \frac{1+\nu^d}{6(1-\nu^d)}, \quad \psi = \frac{1}{2(1-\nu^d)} \quad (38)$$

考虑到法向量的几何约束条件 $\sum_{j=1}^3 n_j^2 = 1$ 。为获得式 (37) 中硬化模量的最大值, 对于这种带有约束条件的极值问题, 采用 Lagrange 不定乘子法构造下列无约束条件的极值问题

$$L = \frac{H}{4\xi G^d} - \beta \left(\sum_{j=1}^3 n_j^2 - 1 \right) \quad (39)$$

式中 β 为待定的 Lagrange 乘子。式 (39) 中硬化模量 H 的极值可由下列极值条件确定

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = 2A_i n_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = - \left(\sum_{j=1}^3 n_j^2 - 1 \right) = 0 \quad (40)$$

$$\text{其中 } A_i = \bar{f}_i^2 + r\bar{f}_i - 2\psi m\bar{f}_i - \beta, \quad m = \sum_{i=1}^3 \bar{f}_i n_i^2 \quad (41)$$

定义

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial n_i \partial n_j} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (42)$$

式中 $H_{ij} = 2A_i \delta_{ij} - 8\psi \bar{f}_i \bar{f}_j n_i n_j$ 。

考虑到 n_i 并非恒为 0, 则由式 (41) 中第一个条件可知 $A_i \equiv 0$, 于是

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1^2 & \bar{f}_1 \bar{f}_2 & \bar{f}_1 \bar{f}_3 \\ \bar{f}_1 \bar{f}_2 & \bar{f}_2^2 & \bar{f}_2 \bar{f}_3 \\ \bar{f}_1 \bar{f}_3 & \bar{f}_2 \bar{f}_3 & \bar{f}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\psi} \begin{bmatrix} \bar{f}_1^2 + r\bar{f}_1 - \beta \\ \bar{f}_2^2 + r\bar{f}_2 - \beta \\ \bar{f}_3^2 + r\bar{f}_3 - \beta \end{bmatrix} \quad (43)$$

若定义 $h_i = [\bar{f}_1 n_i \quad \bar{f}_2 n_i \quad \bar{f}_3 n_i]$, 则有 $\mathbf{H}_{ij} = -8\psi h_i^T h_j$ 。

假定 $\bar{f}_1 \geq \bar{f}_2 \geq \bar{f}_3$ 且 $\bar{f}_1 \neq 0$, 则由式 (40) 可得

$$\beta(\bar{f}_1 - \bar{f}_2) = -\bar{f}_1 \bar{f}_2 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) \quad (44)$$

$$\beta(\bar{f}_1 - \bar{f}_3) = -\bar{f}_1 \bar{f}_3 (\bar{f}_1 - \bar{f}_3) \quad (45)$$

(1) 当 $\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$ 时, 式 (44) 与式 (45) 不能得到同时满足, 此时式 (37) 中硬化模量不存在最大值。

(2) 当 $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 > \bar{f}_3$ 时, 则 $\beta = -\bar{f}_1 \bar{f}_3$ 。

当 $\bar{f}_1 \neq 0$, $\bar{f}_3 \neq 0$ 由假设与式 (42) 可得

$$\bar{f}_1(n_1^2 + n_2^2) + \bar{f}_3 n_3^2 = \frac{1}{2\psi}(\bar{f}_1 + \bar{f}_3 + r) \quad (46)$$

由式 (41) 与式 (46) 可得

$$n_3^2 = -\frac{\bar{f}_3 + (1-2\psi)\bar{f}_1 + r}{2\psi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)}, \quad n_1^2 + n_2^2 = 1 - n_3^2 \quad (47)$$

因为 $0 \leq n_3^2 \leq 1$, 可得

$$\bar{f}_3 + (1-2\psi)\bar{f}_1 + r \leq 0 \quad (48)$$

$$\bar{f}_1 + (1-2\psi)\bar{f}_3 + r \geq 0 \quad (49)$$

(3) 当 $\bar{f}_1 > \bar{f}_2 = \bar{f}_3$ 时, 则 $\beta = -\bar{f}_1 \bar{f}_3$, 可得

$$n_1^2 = -\frac{\bar{f}_1 + (1-2\psi)\bar{f}_3 + r}{2\psi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)}, \quad n_2^2 + n_3^2 = 1 - n_1^2 \quad (50)$$

$$\bar{f}_3 + (1-2\psi)\bar{f}_1 + r \leq 0 \quad (51)$$

$$\bar{f}_1 + (1-2\psi)\bar{f}_3 + r \geq 0 \quad (52)$$

由此通过推导可以得到发生不连续局部化分叉时的最大硬化模量为

$$H^{db} = G^d \xi \left[\psi(\bar{f}_1 + \bar{f}_3 + r)^2 - \bar{f}_1 \bar{f}_3 - k \right] \quad (53)$$

如图 1 所示, 若 $r \geq 0$ 且 $\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$, 设 $n_2 = 0$, 则发生局部化的特征面之外法向 n 与坐标轴 x_1 方向之间夹角 θ_{cr} 为

$$\tan^2 \theta_{cr} = \frac{n_3^2}{n_1^2} = -\frac{\bar{f}_3 + (1-2\psi)\bar{f}_1 + \varphi(f_v + g_v)}{\bar{f}_1 + (1-2\psi)\bar{f}_3 + \varphi(f_v + g_v)} \quad (54)$$

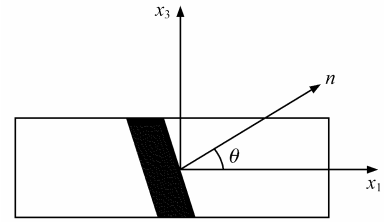


图 1 平面问题中局部化方位角的定义

Fig.1 Orientation angle of localization for plane problems

4 单轴拉伸问题的局部化分析

应用上述各向同性损伤局部化分叉分析理论, 针对单轴拉伸试件的局部化问题, 分别在平面应力条件下与平面应变条件下进行了具体计算与分析。

(1) 平面应变条件下单轴拉伸局部化问题

在平面应变条件下, 假定 $\varepsilon_2 \equiv 0$, $n_2 \equiv 0$; 同时对于单轴拉伸问题, $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_3 = 0$; 则有 $\varepsilon_1 > 0$,

$$\varepsilon_3 = \frac{v^d \varepsilon_1}{(v^d - 1)}$$

$$F = w^0 - r(\hat{d}) \quad (55)$$

则发生局部化的特征面外法线方向角及相应的最大硬化模量分别为

$$\theta_{cr} = \arctan \sqrt{\frac{3v_0 + (1-2v_0)d}{3(1-v_0) - 2d(1-2v_0)}} \quad (56)$$

$$H^{db} = G^d \left[\frac{(v^d)^3 + (v^d)^2 - 5v^d + 1}{18(v^d - 1)} \right] \varepsilon_1^2 \quad (57)$$

由此通过计算可以确定局部化特征面外法线方向角对于损伤程度变量 d 及初始泊松比 ν_0 的依赖关系, 分别如图 2 与图 3 所示。

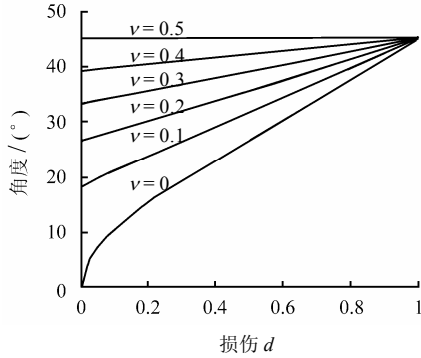


图 2 平面应变条件下不同初始泊松比时材料局部化方向角与损伤程度之间的关系
Fig.2 Dependency of orientation of localization on damage degree for different Poisson's ratios under plane-strain condition

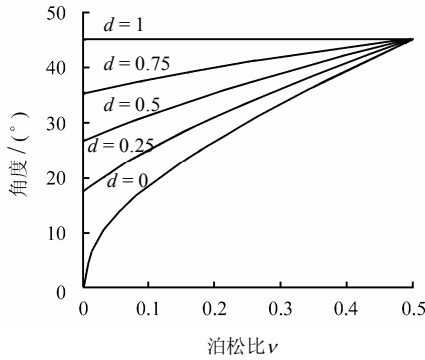


图 3 平面应变条件下不同损伤程度时材料局部化方向角与泊松比之间的关系
Fig.3 Dependency of orientation of localization on Poisson's ratios for different damage degrees under plane strain condition

(2) 平面应力条件下单轴拉伸局部化问题

在平面应力条件下, 假定 $\varepsilon_2 \equiv 0$, $n_2 \equiv 0$; 同时对于单轴拉伸问题, $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_3 = 0$; 则有 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 = -\nu^d \varepsilon_1$ 。发生局部化的特征面外法线方向角及相应的最大硬化模量分别为

$$\theta_{cr} = \arctan \sqrt{\frac{3\nu_0 + (1-2\nu_0)d}{3-(1-2\nu_0)d}} \quad (58)$$

$$H^{db} = G^d \left[\frac{2(\nu^d)^3 + 6(\nu^d)^2 + 2\nu^d - 1}{18(\nu^d + 1)^2} \right] \varepsilon_1^2 \quad (59)$$

同样地, 由此通过计算可以确定局部化特征面外法线方向角对于损伤程度变量 d 及初始泊松比 ν_0 的依赖关系, 分别如图 4 与图 5 所示。

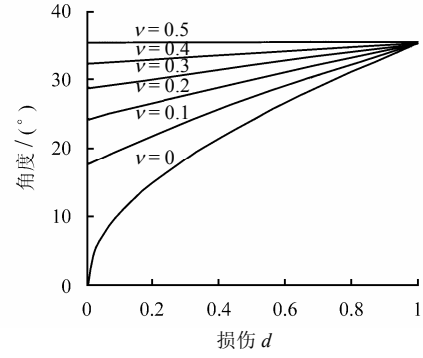


图 4 平面应力条件下不同泊松比时材料局部化方向角与损伤程度之间的关系
Fig.4 Dependency of orientation of localization on damage degree for different Poisson's ratios under plane stress condition

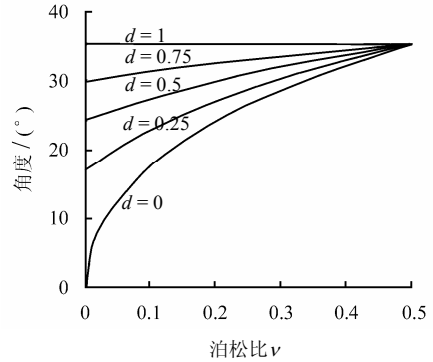


图 5 平面应力条件下不同损伤程度时材料局部化方向角与泊松比之间的关系
Fig.5 Dependency of orientation of localization on Poisson's ratios for different damage degree under plane stress condition

同时为了比较平面应变与平面应力条件下的分叉特性, 图 6 针对初始泊松比 $\nu_0 = 0.3$ 的情况给出了两种条件下局部化特征面外法线方向角随损伤程度变量 d 的变化关系。

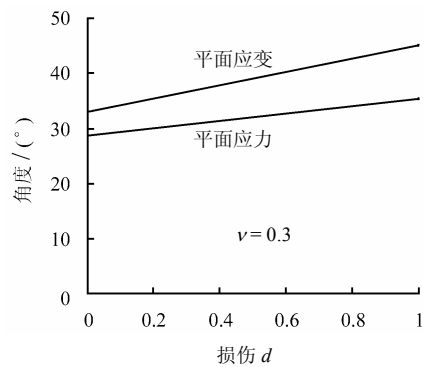


图 6 平面应力与平面应变两种条件下单轴拉伸局部化方向角与损伤程度之间关系的对比
Fig.6 Comparison of dependency of localization orientation on damage degree for uniaxial tension sample under plane-stress and plane-strain conditions

根据上述计算结果,可以发现:

(1) 在单轴拉伸情况下,无论是在平面应力条件还是在平面应变条件下,局部化方向角紧密地依赖于材料的初始泊松比和损伤程度。相同条件下,初始泊松比或损伤程度越大,局部化方向角越大,局部化方向角的增幅越趋于平缓,当材料彻底损伤即 $d=1$ 或材料完全不可压缩即 $\nu=0.5$ 时,局部化特征面将是确定不变的,此时局部化方向角达到其最大值,此时对于平面应力条件 $\theta_{cr}=35^\circ$,而对于平面应变条件 $\theta_{cr}=45^\circ$ 。

(2) 平面应力与平面应变两种条件下单轴拉伸局部化方向角随损伤变量及初始泊松比的变化呈现相似的规律和趋势,一般地与平面应变条件相比,平面应力条件下发生局部化的方向角较低,且随着损伤程度的递增趋势较为平缓。

5 结 语

在考虑损伤弱化和体积扩容的情况下,通过理论推导建立了岩石类材料分叉失稳时的最大硬化模量和局部化方向角,认为失稳时局部化方向角与岩石的损伤程度、初始泊松比有关,损伤程度或初始泊松比越大,岩石的局部化方向角越大,并通过对平面应变和平面应力条件下的单轴拉伸试件所进行的对比分析表明,在相同条件下,平面应变条件下局部化方向角要大于平面应力条件下局部化方向角,且局部化方向角随着初始泊松比或损伤程度的变化的递增速率要大于平面应力条件的递增速率。

参 考 文 献

- [1] Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1958, 6: 236—249.
- [2] Rudnicki J W, Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1975, 23: 371—394.
- [3] Ottosen N S, Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1991, 27(4): 401—421.
- [4] Neilsen M K. Bifurcation in elastic-plastic materials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1993, 30(4): 521—544.
- [5] 李国琛, 耶纳. 塑性大变形微结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [6] 尹光志, 鲜学富, 王宏图. 岩石在平面应变条件下剪切带的分叉分析[J]. **煤炭学报**, 1999, 24(4): 364—367.
- [7] 王学滨, 潘一山, 于海军. 考虑塑性应变率梯度的单轴压缩岩样轴向响应[J]. **岩土力学**, 2003, 24(6): 943—946.
- [8] Carol I, Rizzi E, Willam K. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1994, 31(20): 2 835—2 865.
- [9] Carol I, Rizzi E, Willam K. An 'extended' volumetric /deviatoric formulation of anisotropic damage based on a pseudo-log rate[J]. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, 2002, 21(5): 747—772.
- [10] Ju J W. Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics[J]. **Journal of Engineering Mechanics, ASCE**, 1990, 116(2): 2 764—2 770.

致谢审稿人

尊敬的各位审稿专家,新年好!

《岩土力学》编辑部在中国科学院武汉岩土所领导下,紧跟时代前进的步伐,经过几年踏踏实实地工作,使得《岩土力学》取得了明显的进步,这些成绩的取得离不开同行专家的大力支持与帮助,同时,凝结了审稿专家、作者和编者的共同心血。其中,编辑部最要感谢的就是为确保期刊论文质量而不辞辛苦,对每篇文章认真负责审查把关的审稿专家。

新年伊始,《岩土力学》编辑部对每一位审稿专家致以深深地谢意。恭祝各位专家,身体健康,新年快乐,一切顺意!

《岩土力学》编辑部
2007 年元月